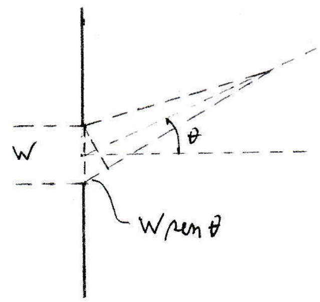
27.2

27.2



$$W \operatorname{sen}\theta = \lambda = \frac{h}{p} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{h}{Wp} \qquad \theta \simeq \arcsin\frac{h}{Wp}$$

27.3

27.3

a) $\nu = \dfrac{E}{h}$ $\quad p = \hbar k \quad p = \dfrac{h}{2\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{\lambda} \quad p = \dfrac{h}{\lambda}$

$$T = \frac{1}{40}\,eV \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = T; \quad p = \sqrt{2mT}\ ; \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

$$\lambda = \frac{4{,}135\cdot10^{-15}}{\sqrt{2\cdot 939{,}55\cdot10^{6}\frac{1}{c^2}\frac{1}{40}}}\;\frac{eV\cdot s}{\sqrt{eV\cdot\frac{1}{m^2 s^{-2}}\,eV}} = 1{,}8\cdot10^{-10}\frac{\cancel{eV}\cdot s}{\cancel{eV}\,\frac{1}{m\,s^{-1}}} = 1{,}8\cdot10^{-10}\,m = 1{,}8\,\mathring{A}$$

b) $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2\cdot\frac{m_e}{c^2}\cdot T}} = \dfrac{hc}{\sqrt{2\cdot m_e\cdot T}}$ com h em $eV\cdot s$ e m_e em eV e T em eV. Notar que m_e em eV é a energia de repouso E_0

(i) $\lambda = \dfrac{4{,}135\cdot10^{-15}\cdot3\cdot10^{8}}{\sqrt{2\cdot0{,}511\cdot10^{6}\cdot10^{3}}} = 0{,}39\cdot10^{-10}\,m = 0{,}39\,\mathring{A}$

(ii) Neste caso a energia cinética dos electrões é elevada. Devemos considerar a aproximação relativista. Assim:

$$E_{total} = \sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2} = E_K + E_0\ ; \quad (pc)^2 + \cancel{(mc^2)^2} = E_K^2 + 2E_KE_0 + \cancel{E_0^2}\ ; \quad pc = \sqrt{E_K(E_K+2E_0)}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{E_K(E_K+2E_0)}} = \frac{4{,}135\cdot10^{-15}\cdot3\cdot10^{8}}{\sqrt{10^{6}\left(10^{6}+2\cdot0{,}511\cdot10^{6}\right)}} = 8{,}77\cdot10^{-3}\,\mathring{A}$$

Nota: se $E_K << 2\cdot E_0$ vem: $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{2E_KE_0}}$ que é a expressão obtida acima para o caso de E_K ser pequeno face a E_0 e ser suficiente a aproximação não-relativista.

$\longrightarrow$

27.3 Contin. Contin 27.3

Calculemos λ, pela aproximação não-relativista, e para o caso de $E_k = 10^6\, eV$.

Vem: $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot T}} = \dfrac{4{,}135 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{\sqrt{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 10^6}} = 12{,}4 \cdot 10^{-3}\, \mathring{A}$, que é

superior ao calculado com a aproximação relativista.

c) $p = m \cdot v = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{3} = 50\ Kg\ m s^{-1}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{50}\ \frac{J \cdot s}{Kg\ m s^{-1}} = 1{,}32 \cdot 10^{-25}\, \mathring{A}$$

d) Raio X : $E = h \cdot \nu$ $\quad \nu = \dfrac{10^6}{4{,}135 \cdot 10^{-15}} = 2{,}42 \cdot 10^{20}\, s^{-1}$; $\lambda_x = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{2{,}42 \cdot 10^{20}} = 1{,}5 \cdot 10^{-9}\, \mathring{A}$

Electrão: $E_{total} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}$; $pc = \sqrt{E^2 - (m_e c^2)^2} = \sqrt{(10^6)^2 - (0{,}5 \cdot 10^6)^2} = \sqrt{0{,}75} \cdot 10^6\, eV$

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{4{,}135 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{0{,}75} \cdot 10^6} = 1{,}43 \cdot 10^{-2}\, \mathring{A}$$

Assim o comprimento de onda do raio-X é muito menor que o comprimento de onda associado ao electrão.

27.4 27.4

$E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{4{,}135 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8}{4100 \cdot 10^{-10}} = 3\, eV$ = energia da luz incidente que produz electrões de 1 eV de energia cinética.

No limiar da extracção de electrões, estes terão zero eV de energia cinética e então bastará que a luz incidente tenha uma energia de $3 - 1 = 2\, eV$ para se dar a extracção do electrão. A esta energia da luz monocromática corresponde um comprimento de onda dado por:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{E_{min}} = \frac{3 \cdot 4100}{2} = 6150\, \mathring{A}$$

27.5

$$E=\frac{hc}{\lambda}\ ;\ \lambda=\frac{hc}{E}=\frac{4{,}135\cdot 10^{-15}\cdot 3\cdot 10^{8}}{13{,}6}=912\ \text{Å}$$

Esta radiação vai situar-se na zona dos UV

27.6

Raio de Bohr no par protão-electrão: $a_0=\dfrac{\hbar^2}{m_e\,k\cdot e^2}=0{,}529\ \text{Å}$

massa muão $=206\cdot m_e$ e então, onde estão m_e passar a ser $206\,m_e$ e

Vem $a_\mu=\dfrac{0{,}529}{206}\ \text{Å}=2{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{Å}$

27.7

$E=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{\beta}{2}x^2$ em que $p\cdot x=\hbar$ ou $p=\dfrac{\hbar}{x}$ e, substituindo, vem

$E=\dfrac{\hbar^2}{2mx^2}+\dfrac{\beta}{2}x^2$. No mínimo da energia a derivada segundo x (e também segundo p) deve ser nula. Então:

$$\frac{dE}{dx}=0\ ;\ \frac{dE}{dx}=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot 2\cdot\frac{1}{x^3}+\beta x=0\ ;\ -\frac{\hbar^2}{m}+\beta x^4=0\ ;\ x^4=\frac{\hbar^2}{\beta m}\ ;\ x^2=\hbar\sqrt{\frac{1}{\beta m}}$$

e substituindo x^2 em E vem a energia mínima:

$$E_{min}=\frac{\hbar^2}{2m\hbar\sqrt{\frac{1}{\beta m}}}+\frac{\beta}{2}\hbar\sqrt{\frac{1}{\beta m}}=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{\beta}{m}}+\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{\beta}{m}}=\hbar\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

27.8

$$\nu=\frac{c}{\lambda}\ ;\ \Delta\nu=c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}=3\cdot 10^{8}\frac{0{,}01\cdot 10^{-10}}{(5\cdot 10^{3}\cdot 10^{-10})^2}=\frac{3}{25}\cdot 10^{10}\ s^{-1}$$

Sabe-se (pg 30-6, rodapé) que o tempo no estado excitado é $T=\dfrac{1}{\Delta\nu}=\dfrac{25}{3}10^{-10}\,s$

ou seja $T=8{,}3\cdot 10^{-10}\,s$

27.13

a) $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4,135\cdot10^{-15}\cdot 3\cdot10^{8}}{500\cdot10^{-10}} = 24,81$ eV que é a energia do fotão

ora o electrão tem energia de $-13,6$ eV. Então sobra $24,81-13,6 = 11,2$ eV

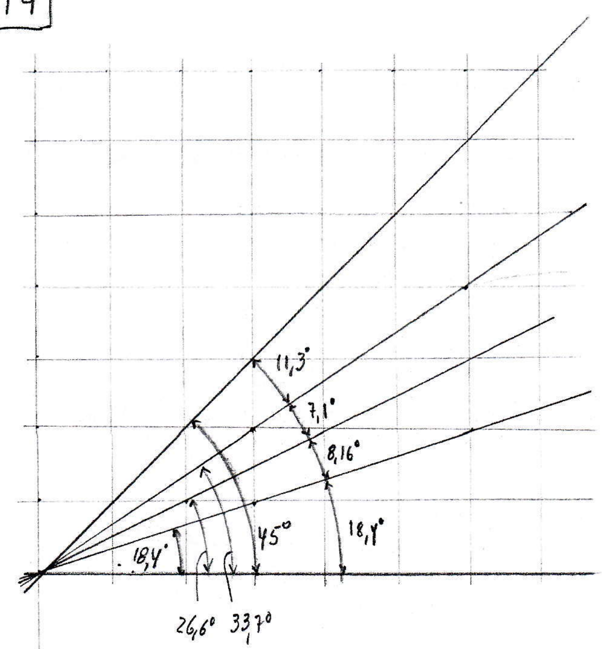
que é a energia cinética com que fica o electrão livre

b) A energia mínima da radiação X capaz de ionizar o átomo é:

$E_{min} = 13,6 \text{ eV} = h\nu$ ou a frequência de X será: $\nu = \frac{13,6}{4,135\cdot10^{-15}} = 3,3\cdot10^{15}$ Hz

— // — // —

27.14

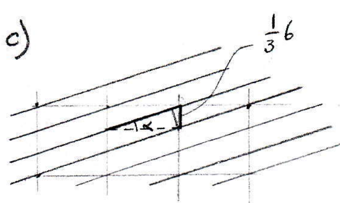


a) o ângulo mínimo entre 2 linhas adjacentes é de $7,1^\circ$

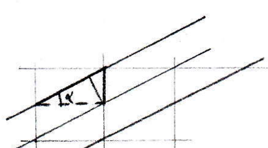
b) Distância máxima entre 2 árvores sucessivas verifica-se para o alinhamento que corresponde ao ângulo de $33,7^\circ$, e vale:

$$d_{max} = \sqrt{(3\cdot6)^2+(2\cdot6)^2} = \sqrt{3^2+2^2}\cdot6 = 6\cdot\sqrt{13} = 21,6 \text{ m}$$

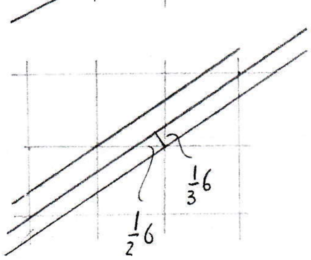
c)

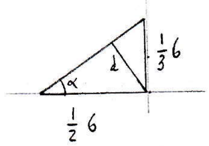


$tg\,\alpha = \frac{1}{3}$ $\quad d = 6\cdot sen\,\alpha = 6\,\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = 6\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = 1,9$ m



$tg\,\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad d = 6\,sen\,\alpha = 6\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = 2,7$ m





$tg\,\alpha = \frac{2}{3}$ $\quad d = \frac{6}{2}\cdot\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = 3\cdot\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = 3\,\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = 1,66$ m

Nota: completar...

$\boxed{27.16}$ $\boxed{27.16}$

Sejam $E_3 > E_2 > E_1$

$$E_3 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_{31}}$$
$$E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_{21}}$$
$$E_3 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_{32}}$$

Subtraindo: $E_3 - E_2 = hc\left(\frac{1}{\lambda_{31}} - \frac{1}{\lambda_{21}}\right) = hc\frac{1}{\lambda_{32}}$

Isto é: $\frac{1}{\lambda_{32}} = \frac{1}{\lambda_{31}} - \frac{1}{\lambda_{21}}$

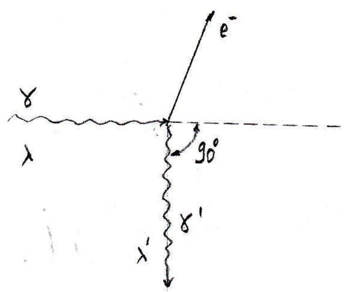
Daqui vem: $\lambda_1 = 1216$ Å; $\lambda_2 = 1026$ Å; $\lambda_3 = 973$ Å e então:

$$\frac{1}{\lambda_{21}} = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{1026} - \frac{1}{1216} = \frac{1}{6566} \qquad \lambda_{21} = 6566 \text{ Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_{31}} = \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{973} - \frac{1}{1216} = \frac{1}{869} \qquad \lambda_{31} = 4869 \text{ Å}$$

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{973} - \frac{1}{1026} = \frac{1}{18835} \qquad \lambda_{32} = 18835 \text{ Å}$$

$\boxed{27.17}$ $\boxed{27.17}$



Pretende-se saber qual é a energia cinética do electrão depois do embate.

En. total antes: $E_{t_a} = \frac{hc}{\lambda} + m_e c^2$

En. total depois: $E_{t_d} = \frac{hc}{\lambda'} + E_{K_e} + E_{0_e}$ com $E_{0_e} = m_e c^2$

Mas $E_{t_a} = E_{t_d}$ e vem: $\frac{hc}{\lambda} + \cancel{m_e c^2} = \frac{hc}{\lambda'} + E_{K_e} + \cancel{E_{0_e}}$ pelo que $\frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} - E_K$

Por outro lado: momento total antes: $p = \frac{h}{\lambda}$

momento total depois: $p_{e_x} = \frac{h}{\lambda}$ e $p_{e_y} = -\frac{h}{\lambda'}$ pelo que

$p_e = \sqrt{p_{e_x}^2 + p_{e_y}^2}$.

Por outro lado: $E_{t_d} = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} = E_K + E_0$; $(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2 = (E_K + E_0)^2$

$(p_e c)^2 + \cancel{(m_e c^2)^2} = E_K^2 + 2E_K E_0 + \cancel{E_0^2}$; $\left(p_{e_x}^2 + p_{e_y}^2\right)c^2 = E_K^2 + 2E_K E_0$; $\left(\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2}\right)c^2 = E_K^2 + 2E_K E_0$

$\frac{h^2c^2}{\lambda^2} + \left(\frac{hc}{\lambda} - E_K\right)^2 = E_K^2 + 2E_K E_0$; $\frac{h^2c^2}{\lambda^2} + \frac{h^2c^2}{\lambda^2} - 2\frac{hc}{\lambda}E_K + \cancel{E_K^2} = \cancel{E_K^2} + 2E_K E_0$; $2\frac{h^2c^2}{\lambda^2} - 2\frac{hc}{\lambda}E_K = 2E_K E_0$.

27.17 Contin. Contin. 27.17

$$\frac{\hbar^2c^2}{\lambda^2} = \left(\frac{\hbar c}{\lambda} + E_0\right)E_k \quad ; \text{ e então } \quad E_k = \frac{\frac{\hbar^2c^2}{\lambda^2}}{\frac{\hbar c}{\lambda} + E_0} = \frac{\frac{\hbar c}{\lambda}}{1 + \frac{\lambda}{\hbar c}E_0} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_0}{E_\gamma}}$$

Em valores numéricos temos:

$$E_\gamma = \frac{\hbar c}{\lambda} = \frac{4{,}135 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{-10}} = 4135 \text{ eV} \quad \text{e} \quad E_0 = 0{,}511 \cdot 10^6 \text{ eV. Assim:}$$

$$E_k = \frac{4135}{1 + \frac{0{,}511 \cdot 10^6}{4135}} = \underline{\underline{33 \text{ eV}}}$$

27.18 27.18

a) $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}$ donde $p = \sqrt{2m_n E_k}$ e $m_n c^2 = 939{,}55 \cdot 10^6$ eV

Então $p = \sqrt{2 \cdot \frac{939{,}55 \cdot 10^6}{c^2} \cdot \frac{1}{40}} = 6854 \frac{\text{eV}}{c}$ e $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4{,}135 \cdot 10^{-15}}{6854} \cdot 3 \cdot 10^8 = 1{,}8$ Å

Por outro lado $\sin\theta = \frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot d} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-10}} = \frac{1{,}8}{2{,}4} \Rightarrow \underline{\underline{\theta = 48^\circ}}$

Nota: $\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} = E_k + E_0$; $(pc)^2 = E_k^2 + 2E_kE_0$; $pc = \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}$

e se $E_k << E_0$ (caso da aprox. não relativista) vem:

$pc \cong \sqrt{2E_kE_0} = \sqrt{2E_k mc^2} = \sqrt{2mE_k}\, c$ e assim: $p = \sqrt{2mE_k}$

ou $E_k = \frac{p^2}{2m}$ como se usou acima.

b) Em $\sin\theta = \frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot d}$ se a energia diminui então λ aumenta

$\frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot d}$ aumenta e o valor máximo, para

que haja difracção é $\sin\theta_{crítico} = 1$, e vem:

$\sin\theta_{cr} = \frac{\lambda_{cr}}{2 \cdot d} = 1$; $\lambda_{cr} = 2 \cdot d = 2{,}4$ Å ;

27.18 Contin. Contin. 27.18

Sabemos λ e podemos calcular o momento e depois a energia.

$$p_{cr} = \frac{h}{\lambda_{cr}} = \frac{4{,}135\cdot10^{-15}}{2{,}4\cdot10^{-10}}\cdot\frac{eV}{m/s^{-1}} = 1{,}723\cdot10^{-5}\ \frac{eV}{m/s^{-1}}$$

Mas $p_{cr} = \sqrt{2\cdot m_n\cdot E_k} \Rightarrow E_{k_{cr}} = \dfrac{p_{cr}^2}{2\cdot m_n} = \dfrac{\left(1{,}723\cdot10^{-5}\right)^2}{2\cdot\dfrac{939{,}55\cdot10^6}{c^2}} = \dfrac{\left(1{,}723\cdot10^{-15}\cdot3\cdot10^8\right)^2}{2\cdot939{,}55\cdot10^6} =$

$$E_{k_{cr}} = 0{,}0142\,eV = 0{,}0142\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{Joule} = \underline{2{,}3\cdot10^{-21}\ \text{Joule}}$$

27.19 27.19

Como se escreveu no problema 27.18, temos: $pc = \sqrt{E_k(E_k+2E_0)}$

a) i) Caso $E_k = 10$ keV. Então: $p = \frac{1}{c}\sqrt{10^4\left(10^4+2\cdot0{,}511\cdot10^6\right)} = 3{,}38\cdot10^{-4}\ \frac{eV}{m/s^{-1}}$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4{,}135\cdot10^{-15}}{3{,}38\cdot10^{-4}} = 1{,}22\cdot10^{-11}\ m = 1{,}22\cdot10^{-1}\ \mathring{A} = 0{,}122\ \mathring{A}$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2\cdot d} = \frac{1{,}22\cdot10^{-11}}{2\cdot1{,}2\cdot10^{-10}} = 0{,}05 \quad \text{ou} \quad \underline{\theta = 2{,}86^\circ}$$

ii) Caso $E_k = 0{,}5$ MeV. Então: $p = \frac{1}{c}\sqrt{0{,}5\cdot10^6\left(0{,}5\cdot10^6+2\cdot0{,}511\cdot10^6\right)} =$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{0{,}5\cdot(0{,}5+2\cdot0{,}511)}\ 10^6 = \frac{1}{c}\ 0{,}872\cdot10^6 = 2{,}9\cdot10^{-3}\ \frac{eV}{m/s^{-1}}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4{,}135\cdot10^{-15}}{2{,}9\cdot10^{-3}} = 1{,}422\cdot10^{-12}\ m = 1{,}422\cdot10^{-2}\ \mathring{A} = 0{,}01422\ \mathring{A}$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2\cdot d} = \frac{1{,}422\cdot10^{-12}}{2\cdot1{,}2\cdot10^{-10}} = 0{,}0059 \quad \text{ou} \quad \theta = 0{,}34^\circ$$

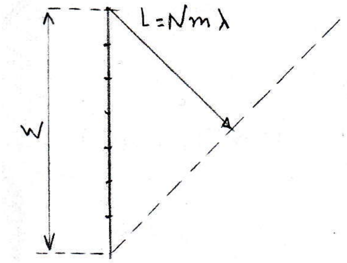
27.20 27.20

a) Sabemos que $\Delta f = \frac{1}{T}$ e que $f = \frac{c}{\lambda}$ pelo que $\Delta f = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{T}$

e vem $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{c\ T} = \dfrac{\left(5\cdot10^3\cdot10^{-10}\right)^2}{3\cdot10^8\cdot10^{-8}} = \dfrac{25}{3}\cdot10^{-14} = 8{,}3\cdot10^{-4}\ \mathring{A}$

27.20 Contin. — Contin. 27.20

b)



Da pg. 38.3 vem-se que:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L} \quad \text{e} \quad W = \sqrt{2}\cdot L$$

N: nº linhas rede de difracção

m: ordem do padrão de difracção

Assim $L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{(5\cdot10^3\cdot10^{-10})^2}{8,3\cdot10^{-4}\cdot10^{-10}} = 3$ m e então $W = 3\sqrt{2}$ m

c) $E_1 - E_0 = E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4,135\cdot10^{-15}\cdot3\cdot10^8}{5000\cdot10^{-10}} = 2,48$ eV

27.21 — 27.21

a) $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}$ e $\vec{p}\cdot\vec{r} = n\hbar$ mas $\vec{p}\perp\vec{r}$ e dá $p\cdot r = n\hbar$ ou

$m v r = n\hbar$ e, por outro lado, $F = \frac{mv^2}{r}$; $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m^2v^2}{r\,m} = \frac{n^2\hbar^2}{r^2\cdot r\cdot m}$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{n^2\hbar^2}{r\,m} \quad \text{ou} \quad r_n = 4\pi\epsilon_0\frac{\hbar^2 n^2}{e^2 m}$$

Mas $v = \omega r$ e então $m\omega r^2 = n\hbar$; $\omega = \frac{n\hbar}{m r^2} = \frac{n\hbar}{m}\cdot\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2 m}{\hbar^2 n^2}\right)^2 =$

$$\omega_n = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{e^4 m}{\hbar^3 n^3}$$

b) $T_n = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega(\omega r^2) = \frac{1}{2}m\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{e^4\cancel{m}}{\hbar^3 n^3}\cdot\frac{n\hbar}{\cancel{m}} =$

$$= \frac{1}{2}m\frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 n^2}$$

$$U_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2 m}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2} = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 n^2} = -2T_n$$

$$E_n = T_n + U_n = T_n - 2T_n = -T_n$$

c) $E_{n_i} - E_{n_f} = -\frac{K}{n_i^2} - \left(-\frac{K}{n_f^2}\right) = K\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$, isto é, $\Delta E \propto \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$