$\boxed{30.1}$

a) $K_B T = 1\,eV = 1{,}602 \times 10^{-19}\,J$

$$T = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}}{K_B} = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}}{1{,}38 \times 10^{-23}} = 11.604{,}5\,K$$

b) $K_B(23 + 273{,}15) = 4{,}089 \times 10^{-21}\,J$

$$4{,}089 \times 10^{-21}\,J = \left(\frac{1}{39{,}18}\right) eV$$

c) $E = 1\,eV = 1{,}602 \times 10^{-19}\,J$

$$E = h\nu \Rightarrow E = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$$

$$\lambda = \frac{6{,}626 \times 10^{-34} \times 299{,}792 \times 10^{6}}{1{,}602 \times 10^{-19}} = 12.398\,\mathring{A}$$

$\boxed{30.2}$

$1\,eV = 1{,}602 \times 10^{-19}\,J$

$6{,}022 \times 10^{23}\,atom = 1\,mol$

$$\frac{1\,eV}{6{,}022 \times 10^{23}\,atom} = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\,J}{1\,mol}$$

$$\frac{1\,eV}{atom} = 6{,}022 \times 10^{23} \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,J/mol$$

$$1\,eV/atom = 96485\,J/mol$$

$\boxed{30.4}$

$$I_\lambda(T) = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

1. $T = 2000\,K$, $\lambda = 0{,}31\,\mu m$ $\Longrightarrow I_1 = 3{,}342\times 10^{6}\ J\,s^{-1}\,m^{-3}\,sr^{-1}$

2. $T = 4000\,K$, $\lambda = 0{,}31\,\mu m$ $\Longrightarrow I_2 = 3{,}732\times 10^{11}\ J\,s^{-1}\,m^{-3}\,sr^{-1}$

Então: $\dfrac{I_1}{I_2} \simeq 0{,}9\times 10^{-5}$ //

$\boxed{30.6}$

a)
$$I(\omega) = \frac{\hbar\,\omega^3}{\pi^2 c^2\left(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1\right)}$$

$$I = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2}\int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\,d\omega$$

Fazemos:

$$x = \frac{\hbar}{k_B T}\,\omega \Longrightarrow d\omega = \frac{k_B T}{\hbar}\,dx$$

$$I = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2}\int_0^\infty \frac{k_B^3 T^3}{\hbar^3} x^3 \cdot \frac{1}{e^x - 1}\cdot\frac{k_B T}{\hbar}\,dx$$

$$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^2}\frac{k_B^4 T^4}{\hbar^4}\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx}_{=\frac{\pi^4}{15}}$$

$$I = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\,c^2\hbar^3}\cdot T^4$$

$$= \text{Const.}\ T^4 \quad \text{c.q.d} //$$

b) $$I(\omega) = \frac{\hbar\,\omega^3}{\pi^2 c^2\left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)}$$

Na situação em que $e^{\hbar\omega/kT} >> 1$, então:

$$I(\omega) = \frac{\hbar\,\omega^3}{\pi^2 c^2 e^{\hbar\omega/kT}}$$

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = \frac{3\hbar\,\omega^2\pi^2 c^2 e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - \frac{\hbar}{kT}\pi^2 c^2 e^{\hbar\omega/kT}\hbar\,\omega^3}{\left(\pi^2 c^2 e^{\hbar\omega/kT}\right)^2}$$

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow 3\hbar\,\omega^2\pi^2 c^2 e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - \frac{\hbar}{kT}\pi^2 c^2 e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}\hbar\,\omega^3 = 0$$

$$3kT\cancel{\hbar}\,\cancel{\omega^2}\cancel{\pi^2 c^2}e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - \hbar^{\cancel{2}}\cancel{\pi^2 c^2}e^{\hbar\omega/kT}\omega^{\cancel{3}} = 0$$

$$3kT = \hbar\,\omega \Rightarrow \omega = \frac{3k}{\hbar}T$$

$$\underline{\underline{\omega = \text{const.}\,T}} \qquad \text{c.q.d}$$

$\boxed{30.7}$

Suponhamos que temos N osciladores, cada um oscilando na frequência ω. Alguns destes osciladores estarão no estado de mais baixa energia (estado fundamental) e os outros estarão em um dos três estados excitados degenerados ($\Delta E_1 = \Delta E_2 = \Delta E_3$).

Necessitamos determinar a energia média de todos os osciladores. Para isso vamos determinar a energia total de todos os osciladores à temperatura T e dividir o resultado pelo número de osciladores. Tal será a energia média por oscilador em equilíbrio térmico.

N_0 : nº de osciladores no estado fundamental

$N_1 = N_2 = N_3$: nº de osciladores nos estados excitados

$$N_1 = N_0\, e^{-\frac{\Delta E_1}{k_B T}} \;;\quad N_2 = N_0\, e^{-\frac{\Delta E_2}{k_B T}} \;;\quad N_3 = N_0\, e^{-\frac{\Delta E_3}{k_B T}}$$

Como $\Delta E_1 = \Delta E_2 = \Delta E_3 = \Delta E$, então:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_0\, e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$$

Relativamente às energias dos estados fundamental e excitados podemos afirmar:

$$E_0 = 0$$

$$E_1 = N_1 \Delta E \implies E_1 = N_0\, e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \Delta E$$

$$E_2 = N_2 \Delta E \implies E_2 = N_0\, e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \Delta E$$

$$E_3 = N_3 \Delta E \implies E_3 = N_0\, e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \Delta E$$

$$E_{total} = E_0 + E_1 + E_2 + E_3$$

$$= 3 N_0\, e^{-\Delta E / k_B T} \Delta E$$

$$\langle E \rangle = \frac{E_{total}}{N_0 + N_1 + N_2 + N_3}$$

$$= \frac{3 N_0 \, e^{-\Delta E / k_B T} \, \Delta E}{N_0 + 3 N_0 \, e^{-\Delta E / k_B T}}$$

$$= \frac{3 \, e^{-\Delta E / k_B T} \, \Delta E}{1 + 3 e^{-\Delta E / k_B T}}$$

$$= \frac{3 \Delta E}{e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} + 3}$$

Assim, a energia média por oscilador, em equilíbrio térmico à temperatura T é:

$$\langle E \rangle = \frac{3 \Delta E}{e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} + 3}$$

A energia de N osciladores é: $U = \dfrac{3 N \Delta E}{e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} + 3}$

$$\boxed{C_V = \left[\frac{\partial U}{\partial T}\right]_V = \frac{3 N k_B \left(\Delta E / k_B T\right)^2 e^{\Delta E / k_B T}}{\left(e^{\Delta E / k_B T} + 3\right)^2}}$$

c.q.d