34.1

Consideremos a 2ª Lei de Newton para massa constante:

$$F = ma$$

e façamos a respetiva análise dimensional:

$$[F] = [kg]\frac{[L]}{[T]^2} \Rightarrow [F][L] = [kg]\frac{[L]^2}{[T]^2} \Rightarrow$$

$$\frac{[L]^2}{[T]^2} = \frac{[F][L]}{[kg]}$$ ou seja: Uma velocidade elevada ao quadrado pode ser expressa em $\frac{Nm}{kg}$.

As análises dimensionais do Bulk modulus e da densidade volúmica são as seguintes, respetivamente

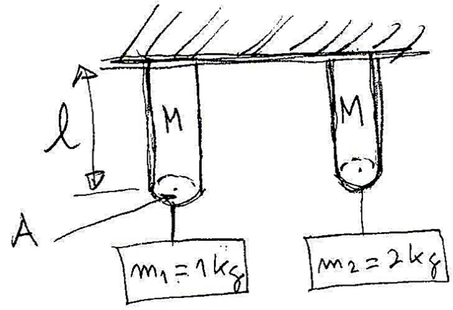
$$\frac{[F]}{[L]^2} \quad e \quad \frac{[kg]}{[L]^3}.$$

Dividindo as dimensões do bulk modulus pelas da densidade volúmica, obtemos as dimensões de uma velocidade elevada ao quadrado!

$$\frac{\frac{[F]}{[L]^2}}{\frac{[kg]}{[L]^3}} = \frac{[F][L]}{[kg]}.$$

então: $v^2 = \frac{M}{\rho} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$ c.q.d.

34.2



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{A\ell} \Rightarrow A = \frac{M}{\rho \ell}$$

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow P = \frac{mg}{A} \Rightarrow P = \frac{mg\rho\ell}{M}$$

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{mg\ell}{M}$$

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} \Rightarrow c_s^2 = \frac{mg\ell}{M} \Rightarrow c_s = \sqrt{\frac{mg\ell}{M}}$$

Entrò:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{m_1 g \ell}{M}}}{\sqrt{\frac{m_2 g \ell}{M}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

34.3

A velocidade do som em qualquer meio é:

$$C_s^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \quad (1)$$

A variação da pressão relativamente à variação da densidade volumétrica faz-se sem transferência de calor pelo que é adiabática.

$$pV^\gamma = \text{const.} \Rightarrow p\left(\frac{m}{\rho}\right)^\gamma = \text{const.} \Rightarrow p = \frac{\rho^\gamma}{m^\gamma} \cdot \text{const} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \rho^\gamma \cdot \text{const.}} \quad (2)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \,\text{const.}\, \rho^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma}{\rho} p} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1):

$$C_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad \text{mas } pV = nRT$$

$$C_s = \sqrt{\frac{\gamma \frac{nRT}{V}}{\frac{m}{V}}} \Rightarrow C_s = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{m}}$$

mas $n = \dfrac{m}{M}$ $m \to$ massa do gás, $M \to$ massa molar do gás

$$C_s = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{nM}} \Rightarrow \boxed{C_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$$

Hélio: $M = 4\times10^{-3}$ kg

Gás monoatómico $\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}}$

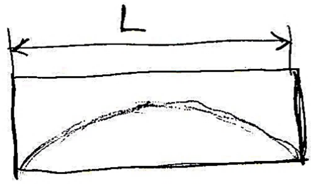
Hidrogénio:

$M = 2\times10^{-3}$ kg

Gás diatómico $\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}}$

$$\boxed{\frac{v_{He}}{v_H} = \frac{\sqrt{\frac{\frac{5}{3}\cancel{RT}}{4\times10^{-3}}}}{\sqrt{\frac{\frac{7}{5}\cancel{RT}}{2\times10^{-3}}}} = 0{,}77}$$

$\boxed{34.4}$



$\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \lambda = 2L \quad (1)$

$\lambda = \frac{v}{f}$, sendo v a velocidade do som no meio. Então:

$\frac{v_s}{f} = 2L \Rightarrow v_s = 2fL \quad (2)$

A equação que relaciona a velocidade do som num meio gasoso com a temperatura é a seguinte:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{molar}}} \quad (3)$$

Igualando (2) a (3): $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{molar}}}$

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{\sqrt{T_A}}{\sqrt{T_B}} \Rightarrow \frac{\cancel{f_A}}{2\cancel{f_A}} = \frac{\sqrt{-180+273}}{\sqrt{T_B+273}} \Rightarrow 2\sqrt{-180+273} = \sqrt{T_B+273}$$

$T_B + 273 = 4(-180+273) \Rightarrow \underline{T_B = 99\,^\circ C}$

$\boxed{34.5}$ $\quad u = A e^{i(\omega t - kx)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ikAe^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 A e^{i(\omega t - kx)} = -k^2 u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega A e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 A e^{i(\omega t - kx)} = -\omega^2 u$$

então: $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u \quad$ e $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u$

$$-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \quad \text{e} \quad \frac{1}{-\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u$$

ou

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

como $\quad v = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \dfrac{1}{v^2} = \dfrac{k^2}{\omega^2} \quad (2)$

substituindo (2) em (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{c.q.d.}$$

$\boxed{34.6}$

a)

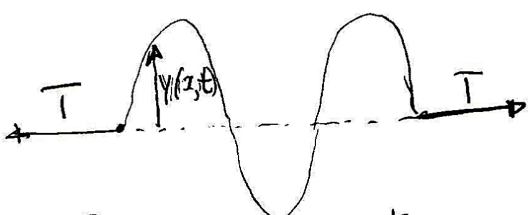


Fig.1: Função deslocamento

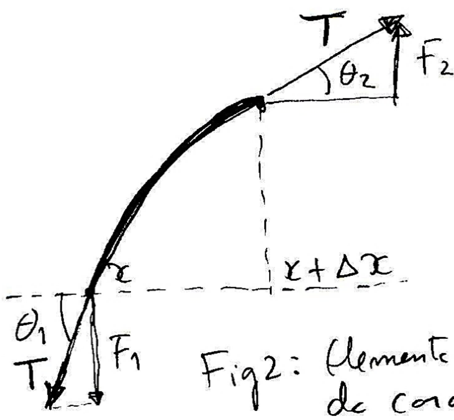


Fig2: Elemento de massa da corda

$$\tan\theta_1 = \frac{\partial}{\partial x} y(x,t) \quad \text{e} \quad \tan\theta_2 = \frac{\partial}{\partial x} y\left[(x+\Delta x), t\right]$$

Para pequenos deslocamentos em todos os pontos da corda, temos:

$$\tan\theta_1 = \sin\theta_1 \quad \text{e} \quad \tan\theta_2 = \sin\theta_2$$

- $F_1 = -T \sin\theta_1 \Rightarrow F_1 = -T \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$

- $F_2 = T \sin\theta_2 \Rightarrow F_2 = T \dfrac{\partial y}{\partial x}[(x+\Delta x), t]$

Desenvolvendo em série de Taylor $y[(x+\Delta x, t]$:

$$y[(x+\Delta x), t] = y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Delta x + \cdots$$

Derivando em ordem a x:

$$\frac{\partial y}{\partial x}[(x+\Delta x), t] = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta x + \cdots$$

$$F_2 = T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta x + \underbrace{\cdots}_{\text{ordem superior}}$$

$$\boxed{F = F_1 + F_2 = T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta x} \quad (1)$$

O elemento de massa da corda tem a seguinte densidade linear: $\sigma = \dfrac{m}{\Delta x} \Rightarrow m = \sigma \Delta x$

Mas $F = ma$, então:

$$F = \sigma \Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

Comparando (1) com (2):

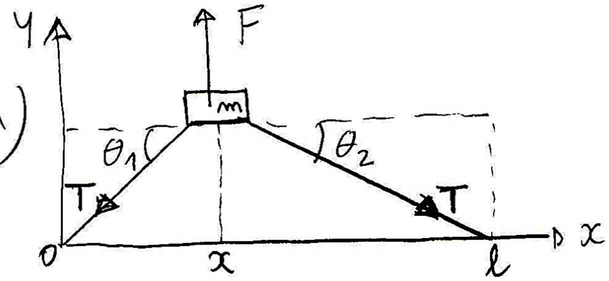
$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

b) Comparando a equação anterior com a equação de onda:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\sigma}{T} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

34.7

a)



$$\tan\theta_1 = \frac{y(t)}{x} \; ; \; \tan\theta_2 = \frac{y(t)}{l-x}$$

para ângulos θ_1 e θ_2 muito pequenos,

$\tan\theta_1 = \sin\theta_1$ e $\tan\theta_2 = \sin\theta_2$

$$F = -T\sin\theta_1 - T\sin\theta_2 \Rightarrow F = -T\frac{y(t)}{x} - T\frac{y(t)}{l-x} \Rightarrow F = -\frac{Tl\, y(t)}{x(l-x)}$$

mas $y(t) = A\cos\omega t$, então:

$$m\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = -\frac{Tl}{x(l-x)}y(t) \Rightarrow -m\omega^2 A\cos\omega t = -\frac{Tl}{x(l-x)}A\cos\omega t$$

$$\omega^2 = \frac{Tl}{mx(l-x)} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Tl}{mx(l-x)}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Tl}{mx(l-x)}}$$

b) $y(t) = A\cos(2\pi\nu t)$

c) • ν será mínimo quando $mx(l-x)$ for máximo!

Façamos $f(x) = mx(l-x) \Rightarrow f'(x) = ml - 2mx$

$f'(x) = 0$ obtemos o ponto de estacionaridade

$$ml - 2mx = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$f''(x) = -2m$. Como $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o ponto de estacionaridade é um máximo.

$$\nu_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Tl}{m\frac{l}{2}\left(l-\frac{l}{2}\right)}} \Rightarrow \nu_{min} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T}{ml}}$$

• ν será máximo quando $x = 0$ ou $l - x = 0$.

Neste caso $\nu = \infty$

34.8

a) $P = P_0 + \Delta P \quad (1)$

$$\Delta P = -B\frac{\Delta V}{V_i} \Rightarrow \Delta P = -B\frac{\cancel{A}\,\Delta\xi(x,t)}{\cancel{A}\,\Delta x} \Rightarrow \Delta P = -B\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$$

sendo $\xi(x,t) = \xi_{max}\cos(\omega t - kx)$ e $B = v^2\rho$

$$\Delta P = -v^2\rho\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} \Rightarrow \Delta P = -v^2\rho K\xi_{max}\sin(\omega t - kx)$$

mas $\omega = vK$

$$\Delta P = -\rho\frac{\omega^2\xi_{max}}{k}\sin(\omega t - kx) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$P = P_0 - \rho\frac{\omega^2\xi_{max}}{K}\sin(\omega t - kx)$$

nota: Não está de acordo c/ a solução do livro.

b) $$v(t) = \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t} = -\omega\xi_{max}\sin(\omega t - kx)$$

no instante $t=0$

$$v(0) = -\omega\xi_{max}\sin(-kx) \Rightarrow v(0) = \omega\xi_{max}\sin(kx)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\Delta m\,\omega^2\xi_{max}^2\sin^2 kx$$

mas $\rho_0 = \dfrac{\Delta m}{A\Delta x} \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{2}\rho_0 A\Delta x\,\omega^2\xi_{max}^2\sin^2 kx$

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{1}{2}\rho_0 A\omega^2\xi_{max}^2\sin^2 kx$$

Quando $\Delta x \to 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta T}{\Delta x} \to \dfrac{dT}{dx}$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}\rho_0 A\omega^2\xi_{max}^2\sin^2 kx$$

A energia cinética em um comprimento de onda é:

$$T = \frac{1}{2}\rho_0 A \omega^2 \xi_{max}^2 \int_0^\lambda \sin kx \, dx$$

$$\boxed{T = \frac{1}{4}\rho_0 A \omega^2 \xi_{max}^2 \lambda}$$

34.9

Vimos no problema anterior que a energia cinética de uma onda sonora num volume de gás com área transversal A e comprimento λ é dada pela equação

$$T_\lambda = \frac{1}{4}\rho_0 A \omega^2 \xi_{max}^2 \lambda$$

A energia potencial total para um comprimento de onda tem o mesmo valor que a energia cinética:

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\rho_0 A \omega^2 \xi_{max}^2 \lambda$$

Assim, a energia mecânica total é:

$$E_\lambda = T_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\rho_0 A \omega^2 \xi_{max}^2 \lambda$$

A potência transportada pela onda sonora é:

$$\mathcal{P} = \frac{E_\lambda}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\rho_0 A \omega^2 \xi_{max}^2 \lambda}{T}$$

Como $\lambda = \frac{v}{\nu}$ e $\frac{1}{\nu} = T \Rightarrow \lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$

Então: $$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho_0 A \omega^2 \xi_{max}^2 v \quad \text{(equação 1)}$$

A intensidade da onda sonora é:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{A} = \frac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \xi_{max}^2 v$$

A intensidade da onda sonora em decibéis é:

$$\gamma = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

sendo $I_0 = 1{,}00 \times 10^{-12}\ W/m^2$ o limiar de audição humana.

a) $$120 = 10 \log \frac{I}{1{,}00 \times 10^{-12}} \Rightarrow I = 1\ W/m^2$$

$$v\,(0^\circ C) = 331\ m/s$$
$$\rho\,(0^\circ C) = 1{,}29\ kg/m^3$$

Recorrendo à equação (1):

$$\xi_{max} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \times 1{,}29 \times 331 \times 4\pi^2 \times 10^4}} = 1{,}09 \times 10^{-2}\ cm$$

b) Partindo da definição de bulk modulus:

$$\Delta P = -B \frac{dV}{V_i} \Rightarrow \Delta P = -B \frac{A\,\Delta\xi(x,t)}{A\,\Delta x}$$

Quando $\Delta x \to 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta\xi(x,t)}{\Delta x} \to \dfrac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$

$$\Delta P = -B \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$$ sendo $\xi(x,t) = \xi_{max}\cos(\omega t - kx)$

$$\Delta P = B k\, \xi_{max} \sin(\omega t - kx)$$

mas $B = \rho v^2$

$$\Delta P = \rho v^2 k\, \xi_{max} \sin(\omega t - kx)$$
$$= \rho v \underbrace{v k}_{\omega}\, \xi_{max} \sin(\omega t - kx)$$
$$= \rho v \omega\, \xi_{max} \sin(\omega t - kx)$$

$$\Delta P = \Delta P_{max} \sin(\omega t - kx)$$

sendo $\Delta P_{max} = \rho v \omega \xi_{max}$.

$$\Delta P = 1{,}29 \times 331 \times 2\pi \times 100 \times 1{,}09 \times 10^{-4}$$

$$= 29{,}2431 \ Pa$$

$$pV^{\gamma} = cte \quad e \quad pV = nRT \Rightarrow p^{1-\gamma} \cdot T^{\gamma} = cte$$

$$(101325)^{1-\frac{7}{5}} \cdot 273{,}15^{\frac{7}{5}} = cte = 25{,}6257$$

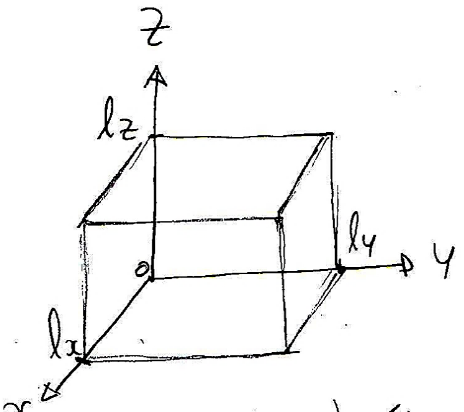
$$(p + \Delta p)^{-\frac{2}{5}} \cdot (T + \Delta T)^{7/5} = 25{,}6257$$

$$(p + 29{,}2431)^{-2/5} \cdot (273{,}15 + \Delta T)^{7/5} = 25{,}6257$$

$$\Delta T = 2{,}4 \times 10^{-2} \ K$$

34.10

a)



$$l_x = n_x \frac{\lambda_x}{2}$$ modos próprios de vibração da onda sonora entre as paredes $l_z 0 l_y$ e $l_z l_x l_y$

$$l_y = n_y \frac{\lambda_y}{2}$$

$$l_z = n_z \frac{\lambda_z}{2}$$

mas $f_x = \frac{v}{\lambda_x} \Rightarrow f_x = \frac{v}{2}\frac{n_x}{l_x}$

$$f_y = \frac{v}{\lambda_y} \Rightarrow f_y = \frac{v}{2}\frac{n_y}{l_y}$$

$$f_z = \frac{v}{\lambda_z} \Rightarrow f_z = \frac{v}{2}\frac{n_z}{l_z}$$

Então: $f_{x,y,z} = \frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}$

verificamos que a frequência na caixa de ressonância é dada por:

$$f = v \cdot cte$$

$$\left.\begin{aligned} f_{He} &= v_{He} \cdot cte \\ f_{ar} &= v_{ar} \cdot cte \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = \frac{f_{He}}{f_{ar}} = \frac{v_{He}}{v_{ar}}$$

$$f = \frac{\sqrt{\frac{\gamma_{He}\cancel{RT}}{M_{He}}}}{\sqrt{\frac{\gamma_{ar}\cancel{RT}}{M_{ar}}}}$$

M_{He} — massa molar do hélio

M_{ar} — massa molar do ar

$$f = \sqrt{\frac{\frac{\frac{5}{3}}{4\times10^{-3}}}{\frac{\frac{7}{5}}{28{,}964\times10^{-3}}}} = 2{,}94$$

b) A inalação de hélio originaria um aumento de 2,94 das frequências do espetro de voz do cantor, ou seja: se a voz natural do cantor correspondesse a barítono, após a inalação de hélio a voz passaria a corresponder a tenor.

34.12

A velocidade do som num gás é dada pela expressão:

$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ (1). Por definição o Bulk modulus é

dado pela equação: $B = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}}$ (2).

Mas $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$ (3) $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dV}{d\rho} = -\frac{m}{\rho^2} d\rho}$ (4)

De (3) e (4) resulta: $\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$ (5).

Substituindo (5) em (2):

$$B = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} \quad (5)$$

Substituindo (5) em (1): $v = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$

a) Sendo $v = 340\ m/s$ e $P_e = \Delta P = 0{,}1\ Pa$; então:

$$\Delta\rho = \rho_e = \frac{\Delta P}{v^2} = \frac{0{,}1}{340^2} = 8{,}7 \times 10^{-7}\ Kg\,m^{-3}$$

b) Usando a equação deduzida na alínea b)...

do problema 34.9:

$$\Delta P_{max} = \rho\, v\, \omega\, \xi_{max}$$

$$0{,}1 = 1{,}29 \times 340 \times 2\pi \times 10^{3}\, \xi_{max}$$

$$\xi_{max} = 3{,}63 \times 10^{-8}\ m$$

c) Usando a seguinte equação, deduzida no problema 34.9, :

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 \xi_{max}^2 v$$

$$I = \frac{1}{2} \times 1{,}29 \times (2\pi \times 10^3)^2 \times (3{,}63 \times 10^{-8})^2 \times 340$$

$$I = 1{,}14 \times 10^{-5}\ W/m^2$$