35.1

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{v_{ph} = c}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{mas} \quad \nu = \frac{v_{ph}}{\lambda} \Rightarrow 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda} v_{ph} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = k\, v_{ph}$$

$$v_g = \frac{d}{dk}(k\, v_{ph}) \Rightarrow v_g = v_{ph} + k\frac{dv_{ph}}{dk}$$

$$v_g = c + \frac{d}{dk}c \Rightarrow \boxed{v_g = c}$$

35.2

i) A velocidade do som num meio gasoso pode ser calculada pela seguinte equação:

$$v_s = v_{ph} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{molar}}} \quad \text{mas} \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{molar}}}$$

$$\text{Mas } v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_g = \frac{d}{dk}\left(k\sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{molar}}}\right)$$

$$v_g = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{molar}}} \quad \text{Então:} \quad v_{ph} = v_g = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{molar}}}$$

Conclusão: Como a velocidade de fase é igual à velocidade de grupo, o ar não é um meio dispersivo.

ii) A velocidade de propagação do som numa corda esticada pode ser obtida pela seguinte equação:

$$v_s = v_{ph} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$, sendo T a tensão

aplicada na corda e μ a densidade linear de massa.

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow \omega = k\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_g = \frac{d}{dk}\left(k\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right) \Rightarrow v_g = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Conclusão: Como $v_{ph} = v_g$ o fio de cobre esticado não é um meio dispersivo.

iii) A velocidade de propagação do som num meio líquido pode ser obtida pela seguinte equação:

$$v_s = v_{ph} = \sqrt{\frac{B}{\rho_v}}$$

No caso da água o bulk modulus (B) é igual a $2{,}1 \times 10^9\ N/m^2$ e a densidade volúmica de massa é $\rho_v = 10^3\ kg/m^3$.

Verificamos que a velocidade do som na água é constante e aproximadamente igual a 1450 m/s.

Nestas condições $v_{ph} = v_g$ pelo que a água não é um meio dispersivo.

35.3

a) $v_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ mas $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow v_{ph} = \sqrt{\frac{g}{k}}$

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ mas $\omega = v_{ph} k \Rightarrow v_g = \frac{d}{dk}(v_{ph} k) \Rightarrow$

$\Rightarrow v_g = \frac{dv_{ph}}{dk} k + v_{ph} \Rightarrow v_g = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k}\right)^{-1/2}\left(-\frac{g}{k^2}\right)k + v_{ph}$

$v_g = -\frac{1}{2}\left(\frac{g}{k}\right)^{-1/2}\left(\frac{g}{k}\right) + v_{ph} \Rightarrow v_g = -\frac{1}{2}\frac{1}{v_{ph}} \cdot v_{ph}^2 + v_{ph}$

$v_g = -\frac{1}{2} v_{ph} + v_{ph} \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{1}{2} v_{ph}}$ c.q.d.

b) Sendo $\lambda = 1000\,m$

$v_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \times 10^3}{2\pi}} = 39{,}5\,m/s$

$v_g = \frac{1}{2} v_{ph} \Rightarrow v_g = 19{,}7\,m/s$

35.5

Neste caso devemos considerar a seguinte equação de onda:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Pretendemos encontrar uma solução da equação de onda do seguinte tipo: $u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$ (2)

Derivando (2) e colocando em (1):

$$X''YT + XY''T = \frac{1}{c^2}XYT''$$

Dividindo ambos os membros da equação anterior por XYT, resulta:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

Os dois membros da igualdade têm funções de variáveis independentes distintas. Para que a igualdade se verifique é necessário que cada membro seja igual à mesma constante, ou seja:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda$$

Então:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda \quad e \quad \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda$$

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = \lambda - \dfrac{Y''}{Y} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{T''}{T} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X''}{X} = \lambda - \dfrac{Y''}{Y} = \lambda_1 \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{T''}{T} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X''}{X} = \lambda_1 & (3) \\ \dfrac{Y''}{Y} = \underbrace{\lambda - \lambda_1}_{\lambda_2} & (4) \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{T''}{T} = \lambda & (5) \end{cases}$$

Vamos encontrar uma solução, [illegible] para a equação (3) que satisfaça as seguintes condições de fronteira: $X(0) = X(a) = 0 \quad , \quad 0 < x \leq a$

$$X'' - \lambda_1 X = 0$$

Esta equação tem solução do tipo:

$$X(x) = C \sin\left(\sqrt{-\lambda_1}\, x\right) + D \cos\left(\sqrt{-\lambda_1}\, x\right)$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C \underbrace{\sin(0)}_{=0} + D \underbrace{\cos(0)}_{=1} = 0 \Rightarrow \boxed{D = 0}$$

Então:

$$X(x) = C \sin\sqrt{-\lambda_1}\, x$$

Como $X(a) = 0 \Rightarrow C \sin\sqrt{-\lambda_1}\, a = 0$

Se $C = 0$ teríamos $X(x) \equiv 0$ o que não pretendemos.

Façamos $C = \dfrac{A}{2}$ e $\sin\sqrt{-\lambda_1}\, a = 0$

$$\sqrt{-\lambda_1}\, a = n\pi \Rightarrow \sqrt{-\lambda_1} = \frac{n\pi}{a}$$

Então:

$$X(x) = \frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (6)$$

Igual procedimento relativamente à equação (4), considerando as condições fronteira

$$Y(0) = Y(b) = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq b ,$$

conduzir-nos-ia à equação:

$$Y(y) = \frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \quad (7)$$

Seguidamente vamos encontrar uma solução para a equação (5):

$$T'' - \chi C^2 T = 0$$

Façamos $\lambda = -k^2$, então:

$$T'' + k^2 c^2 T = 0$$

Mas $\omega = kc \Rightarrow T'' + \omega^2 T = 0$

Então: $T = e^{i\omega t}$ (8)

Substituindo as equações (6), (7) e (8) em (2):

$$u(x,y,t) = \frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \frac{A}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{i\omega t}$$

$$\mu(x,y,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) e^{i\omega t}$$

Para o modo $(n,m) = (1,1)$ resulta:

$$\boxed{\mu(x,y,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{b} y\right) e^{i\omega t}}$$ c.q.d.

A equação anterior pode ser escrita como:

$$\mu(x,y,t) = A \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) e^{i\omega t}$$

A equação de dispersão é:

$$\omega = kc \Rightarrow \omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$\omega = c\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}}$$ // c.q.d.

35.7

$$v_{ph} = \left(\frac{2\pi T}{\lambda \rho} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} \Rightarrow v_{ph} = \left(\frac{T}{\rho} k + \frac{g}{k} \right)^{1/2}$$

$$v_g = v_{ph} + k \frac{d v_{ph}}{dk}$$

$$\frac{d v_{ph}}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{\rho} k + \frac{g}{k} \right)^{-1/2} \left(\frac{T}{\rho} - \frac{g}{k^2} \right) \Rightarrow \frac{d v_{ph}}{dk} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{T}{\rho} - \frac{g}{k^2} \right)}{v_{ph}}$$

$$v_g = v_{ph} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{T}{\rho} k - \frac{g}{k} \right)}{v_{ph}} \Rightarrow v_g = v_{ph} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi T}{\rho \lambda} - \frac{\lambda g}{2\pi} \right)}{v_{ph}}$$

35.8

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{2\pi T}{\lambda \rho} + \frac{g\lambda}{2\pi}}$$

a) $T = 70$ dyne/cm
$\lambda = 1$ cm
$\rho = 1$ g/cm^3
$g = 980$ cm/s^2

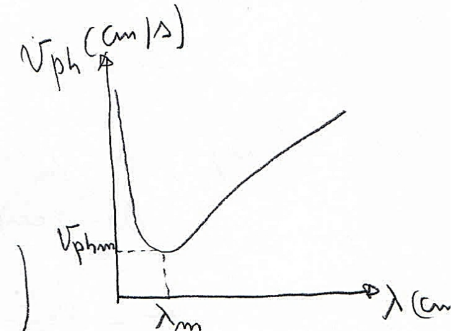
$$v_{ph} = \sqrt{2\pi \times 70 + \frac{980}{2\pi}} = 24{,}4 \text{ cm/s}$$

b) $T = 26$ dyne/cm
$\lambda = 1$ cm
$\rho = 0{,}9$ g/cm^3
$g = 980$ cm/s^2

$$v_{ph} = \sqrt{2\pi \times \frac{26}{0{,}9} + \frac{980}{2\pi}} = 18{,}4 \text{ cm/s}$$

35.9

$$v_{ph} = \left(\frac{2\pi T}{\lambda \rho} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2}$$



$$\frac{dv_{ph}}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi T}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{-1/2}\left(\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda^2 \rho}\right)$$

$$\frac{dv_{ph}}{dk} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda^2\rho}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho}}$$

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{70}{980}} = \underline{\underline{1{,}7 \text{ cm}}}$$

A velocidade de fase correspondente a λ_m é:

$$v_{phm} = \sqrt{\frac{2\pi}{1{,}7} \times 70 + \frac{980 \times 1{,}7}{2\pi}} = 22{,}9 \text{ cm/s}$$

$$\nu_m = \frac{v_{phm}}{\lambda_m} \Rightarrow \nu_m = \frac{22{,}9}{1{,}7} = \underline{\underline{13{,}5\ Hz}}$$

35.10

a) A velocidade angular dos batimentos é:

$\omega_1 - \omega_2 = 10\ rad/s$

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = 1{,}6\ Hz$$

b) $$\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{340}{1{,}6} = 212{,}5\ m$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625\ s$$

$$\Delta t = \frac{T \times \overline{AB}}{\lambda} \Rightarrow \Delta t = \frac{0{,}625 \times 10}{212{,}5} = \underline{\underline{0{,}03\ s}}$$

c) A velocidade da modulação é a velocidade de grupo.

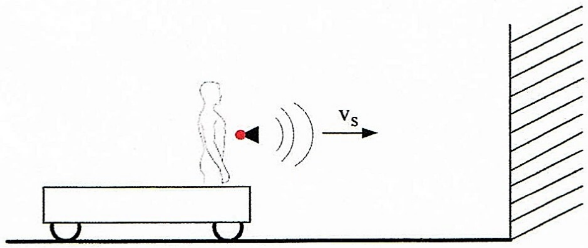
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

$\omega_1 = 210\ rad/s$ e $v_1 = 341\ m/s \Rightarrow k_1 = \frac{210}{341}\ rad/m$

$\omega_2 = 200\ rad/s$ e $v_2 = 340\ m/s \Rightarrow k_2 = \frac{200}{340}\ rad/m$

$$v_g = \frac{210-200}{\frac{210}{341} - \frac{200}{340}} = 362{,}3\ m/s$$

35.11



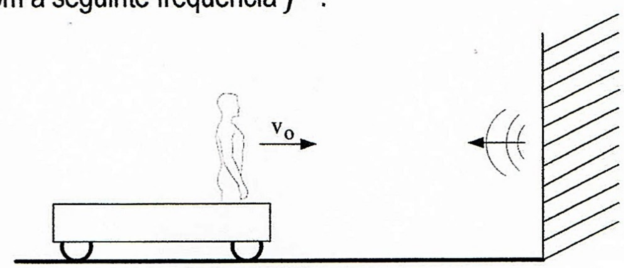
1º O comboio aproxima-se da parede do túnel à velocidade de 5.0 m/s. Nesta situação a frente de onda de frequência f emitida pela buzina chega à parede com a seguinte frequência f':

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda \;\; mas \;\; \lambda = \frac{v}{f} \;\; e \;\; \Delta\lambda = \frac{v_s}{f} \;\; \Rightarrow \lambda' = \frac{v}{f} - \frac{v_s}{f} = \frac{v - v_s}{f}$$

$$f' = \frac{v}{\lambda'} \quad \Rightarrow f' = \left(\frac{v}{v - v_s}\right) f \quad (eq.1)$$

Nota: v é a velocidade do som no ar; v_s é a velocidade da fonte sonora.

2º As ondas refletidas na parede do túnel, de frequência f', propagam-se no sentido e direção do comboio alcançando-o com a seguinte frequência f'':



$$f'' = \frac{v + v_o}{\lambda'} \quad como \;\; \lambda' = \frac{v}{f'} \quad \Rightarrow \; f'' = \left(\frac{v + v_o}{v}\right) f' \quad (eq.2)$$

Substituindo a equação 1 na equação 2:

$$f'' = \left(\frac{v + v_o}{v}\right)\left(\frac{v}{v - v_s}\right) f \quad \Rightarrow \quad f'' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s}\right) f \quad (eq.3)$$

Nota: $v, v_s \; e \; v_o$ são respetivamente as seguintes velocidades: do som no ar; da fonte sonora; do observador.

a) Dados: $f = 340\,Hz$; $v_s = v_o = 5.0\,m/s$; vamos considerar $v = 340\,m/s$

$$f'' = \left(\frac{340 + 5}{340 - 5}\right) 340 \quad \Rightarrow \quad f'' = 350{,}14\,Hz$$

Da interação das ondas, incidente e refletida, resulta um determinado número de batimentos por unidade de tempo, que é igual à diferença daquelas duas frequências: $f'' - f$.

$$f'' - f = 350{,}14 - 340 \approx 10 \; batimentos/s$$

b) O trabalhador situado no solo junto ao vagão também recebe 10 batimentos/s.

35.12

$$f(x,y,z,t)=Ae^{i\omega t}\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

$$\omega^2=v^2\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)$$

a) $$\frac{\partial^2 f(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{l^2\pi^2}{a^2}f(x,y,z,t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{m^2\pi^2}{b^2}f(x,y,z,t) \quad (3) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\omega^2 f(x,y,z,t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\frac{n^2\pi^2}{c^2}f(x,y,z,t) \quad (4)$$

Substituindo (2), (3), (4) e (5) em (1):

$$-\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)f(x,y,z,t)=-\frac{1}{v^2}\omega^2 f(x,y,z,t)$$

mas $\omega^2=v^2\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)$, então:

$$-\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)f(x,y,z,t)=-\frac{1}{\cancel{v^2}}\cancel{v^2}\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)f(x,y,z,t)$$

c.q.d

b) se $x=0 \Rightarrow \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)=0 \Rightarrow f(x,y,z,t)=0$

se $x=a \Rightarrow \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)=\sin(l\pi)=0$ como $l\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y,z,t)=0$

se $y=0 \Rightarrow \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)=0 \Rightarrow f(x,y,z,t)=0$

se $y=b \Rightarrow \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)=\sin(m\pi)$ como $m\geq 1 \Rightarrow f(x,y,z,t)=$

se $z=0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)=0 \Rightarrow f(x,y,z,t)=0$

se $z=c \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)=\sin(n\pi)$ como $n\geq 1 \Rightarrow f(x,y,z,t)=0$

c)

$$f(x,y,z,t)=Ae^{i\omega t}\overbrace{\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)}^{\xi}$$

$$=A\cos\omega t\,\xi + iA\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\xi$$

Para um sistema físico necessitamos da parte real:

$$f(x,y,z,t)=A\cos\omega t\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

A função $f(x,y,z,t)$ oscila sinusoidalmente.

d) $a:b:c = 1:2:3$

$$\omega_0=\sqrt{v^2\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{4a^2}+\frac{n^2}{9a^2}\right)} \Rightarrow \omega_0=\frac{v\pi}{a}\sqrt{l^2+\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{9}}$$

sendo $l\geq 1$; $m\geq 1$; $n\geq 1$

O modo (l,m,n) de mais baixa frequência é $(1,1,1)$,

então:

$$\omega_0=\frac{v\pi}{a}\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} \Rightarrow \omega_0=\frac{v\pi}{a}\left(\frac{7}{6}\right) \quad \text{c.q.d.}$$

e)

l	m	n	
1	1	1	$\omega_0=\frac{\sqrt{49}}{6}\left(\frac{v\pi}{a}\right)$
1	1	2	$\omega_1=\left(\sqrt{53}/7\right)\omega_0$
1	1	3	$\omega_2=\left(\sqrt{57}/7\right)\omega_0$
1	2	1	$\omega_3=\left(\sqrt{58}/7\right)\omega_0$
1	2	2	$\omega_4=\left(\sqrt{62}/7\right)\omega_0$
1	2	3	$\omega_5=\left(\sqrt{66}/7\right)\omega_0$
1	3	1	$\omega_6=\left(\sqrt{67}/7\right)\omega_0$
1	3	2	$\omega_7=\left(\sqrt{71}/7\right)\omega_0$
1	3	3	$\omega_8=\left(\sqrt{75}/7\right)\omega_0$
1	4	1	$\omega_9=\left(\sqrt{76}/7\right)\omega_0$
1	4	2	$\omega_{10}=\left(\sqrt{80}/7\right)\omega_0$

35.13

a)
$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x - k(x-y) \\ m_2 \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k_2 y - k(y-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k_1}{m_1}x - \dfrac{k}{m_1}(x-y) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{k_2}{m_2}y - \dfrac{k}{m_2}(y-x) \end{cases}$$

Como $\omega_0^2 = \dfrac{k_1}{m_1} = \dfrac{k_2}{k_2}$, resulta :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \dfrac{k}{m_1}(x-y) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y - \dfrac{k}{m_2}(y-x) \end{cases}$$

b) $x = Ae^{i\omega t} \Longrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$

$y = Be^{i\omega t} \Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 B e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} -\omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega_0^2 A e^{i\omega t} - \dfrac{k}{m_1}(A-B)e^{i\omega t} \\ -\omega^2 B e^{i\omega t} = -\omega_0^2 B e^{i\omega t} - \dfrac{k}{m_2}(B-A)e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega^2 A - \omega_0^2 A - \dfrac{k}{m_1}A + \dfrac{k}{m_1}B = 0 \\ \omega^2 B - \omega_0^2 B - \dfrac{k}{m_2}B + \dfrac{k}{m_2}A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \dfrac{k}{m_1}\right)A = -\dfrac{k}{m_1}B & (1) \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \dfrac{k}{m_2}\right)B = -\dfrac{k}{m_2}A & (2) \end{cases}$$

Fazendo (1) × (2) :

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m_1}\right)\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m_2}\right)\cancel{AB} = \frac{k^2}{m_1 m_2}\cancel{AB}$$

$$\omega^4 - \left(2\omega_0^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)\omega^2 + \omega_0^4 + \frac{k}{m_1}\omega_0^2 + \frac{k}{m_2}\omega_0^2 = 0$$

$$\omega^4 = y^2$$

$$y^2 - \left(2\omega_0^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)y + \omega_0^4 + \frac{k}{m_1}\omega_0^2 + \frac{k}{m_2}\omega_0^2 = 0$$

$$y = \omega_0^2 + \frac{k}{2m_1} + \frac{k}{2m_2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{2m_1m_2} + \frac{k^2}{4m_1^2} + \frac{k^2}{4m_2^2}}$$

$$y = \omega_0^2 + \left(\frac{k}{2m_1} + \frac{k}{2m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2m_1} + \frac{k}{2m_2}\right)^2}$$

$$y = \omega_0^2 + \left(\frac{k}{2m_1} + \frac{k}{2m_2}\right) \pm \left(\frac{k}{2m_1} + \frac{k}{2m_2}\right)$$

$$y = \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2} \quad (3)$$

$$y = \omega_0^2 + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}} \quad (4)$$

Substituindo (3) em (1):

$$\left(\cancel{\omega_0^2} - \cancel{\omega_0^2} - \frac{k}{m_1}\right)A = -\frac{k}{m_1}B \Rightarrow \boxed{\frac{A}{B} = 1}$$

$$\left(\cancel{\omega_0^2} + \cancel{\frac{k}{m_1}} + \frac{k}{m_2} - \cancel{\omega_0^2} - \cancel{\frac{k}{m_1}}\right)A = -\frac{k}{m_1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A}{m_2} = -\frac{B}{m_1} \Rightarrow \boxed{\frac{A}{B} = -\frac{m_2}{m_1}}$$

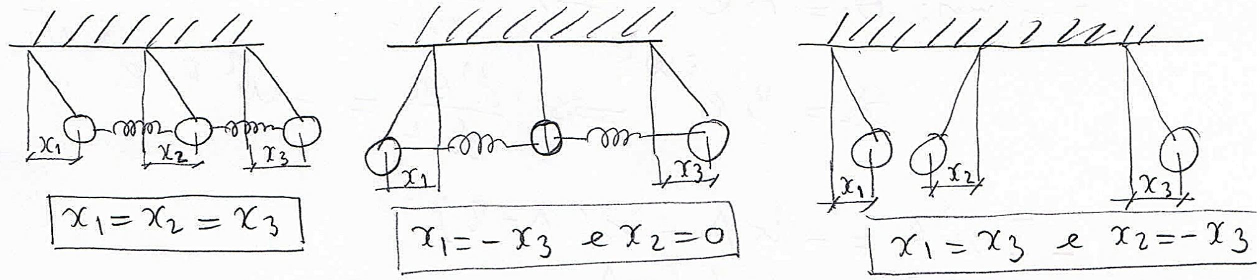
Então:

$$\begin{cases} \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 \quad e \quad \frac{A}{B} = 1} \\ \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \quad e \quad \frac{A}{B} = -\frac{m_2}{m_1}} \end{cases}$$

c.q.d

35.14

O sistema tem os seguintes três modos de oscilação independentes:



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{g}{l} m x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -\dfrac{g}{l} m x_3 - k(x_3 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\dfrac{g}{l} x_1 - \dfrac{k}{m}(x_1 - x_2) \\ \dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -\dfrac{g}{l} x_3 - \dfrac{k}{m}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

1.º $\boxed{x_1 = x_2 = x_3}$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{g}{l}x_1 \quad \text{como} \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

2.º $\boxed{x_1 = -x_3 \text{ e } x_2 = 0}$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)x_1 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}$$

3.º $\boxed{x_1 = x_3 \text{ e } x_2 = -x_3}$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = -\frac{g}{l}x_3 - \frac{2k}{m}x_3 \Rightarrow \frac{d^2x_3}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)x_3$$

Então: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}$

35.15

$$I\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -k\theta_1 - k(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -k(\theta_2 - \theta_1)$$

Façamos: $\theta_1 = Ae^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$

$\theta_2 = Be^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -\omega^2 B e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} -I\omega^2 A = -kA - k(A-B) \\ -I\omega^2 B = -k(B-A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \frac{2k}{I}\right)A = -\frac{k}{I}B \\ \left(\omega^2 - \frac{k}{I}\right)B = -\frac{k}{I}A \end{cases}$$

$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{I}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{I}\right) = \left(\frac{k}{I}\right)^2$$

$$\omega^4 - 3\frac{k}{I}\omega^2 - \left(\frac{k}{I}\right)^2 = 0$$

$$\omega^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\omega_0^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{2,62}}} \text{ e } \boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{0,38}}}$$

Com $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$

35.16

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k(x-y) \quad (1)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k(y-x) \quad (2)$$

Façamos: $x = Ae^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t} \quad (3)$

$y = Be^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 B e^{i\omega t} \quad (4)$

Substituindo (3) e (4) em (1) e (2):

$$\begin{cases} -m\omega^2 A = -kA - k(A-B) \\ -m\omega^2 B = -k(B-A) \end{cases}$$

$$\omega^2 - 2\frac{k}{m} = -\frac{k}{m}B \quad (5)$$

$$\omega^2 - \frac{k}{m} = \frac{k}{m}A \quad (6)$$

Multiplicando (5) e (6) membro a membro:

$$\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) = \left(\frac{k}{m}\right)^2$$

$$\omega^4 - \frac{3k}{m}\omega^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

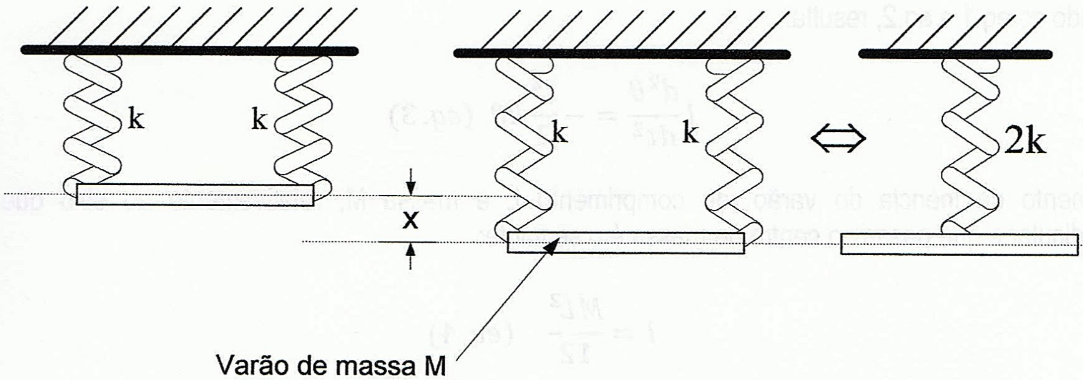
$$\omega^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\omega_0^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}\,\omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{2{,}62}\,\omega_0} \text{ e } \boxed{\omega = \sqrt{0{,}38}\,\omega_0}$$

35.17

O sistema apresenta os seguintes dois modos fundamentais de oscilação:

1º Modo fundamental



$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{M}x = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k}{M}$$

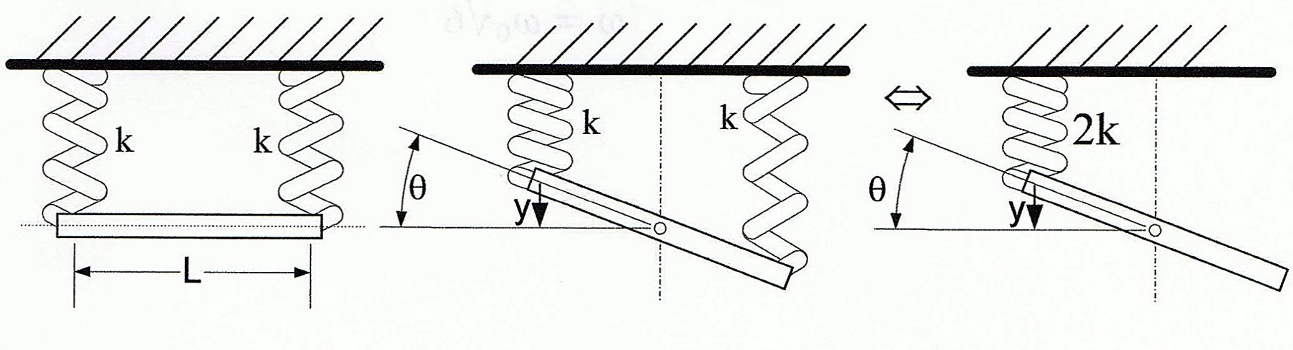
Como:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Então:

$$\omega = \omega_0\sqrt{2}$$

2º Modo fundamental



$$y = \frac{L}{2}\sin\theta\,, \qquad se\ o\ \hat{a}ngulo\ \theta\ for\ pequeno, ent\tilde{a}o\colon \sin\theta \approx \theta \Rightarrow y = \frac{L}{2}\theta$$

Neste modo o varão apresenta pequena oscilação (entre $+\theta$ e $-\theta$) em torno do eixo que lhe é perpendicular e que passa no centro de massa.

$$\tau = I\alpha \Rightarrow \tau = I\frac{d^2\theta}{dt^2}\ (eq.1)$$

Por outro lado:

$$\tau = rF \Rightarrow \tau = \left(\frac{L}{2}\right)F \Rightarrow \tau = \left(\frac{L}{2}\right)(-2ky) \Rightarrow \tau = \left(\frac{L}{2}\right)\left(-2k\frac{L}{2}\theta\right) \Rightarrow \tau = -\frac{L^2}{2}k\theta \ (eq.2)$$

Igualando as eq.1 e eq.2, resulta:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{L^2}{2}k\theta \ (eq.3)$$

O momento de inérícia do varão, de comprimento L e massa M, relativamente ao eixo que lhe é perpendicular e que passa no centro de massa é o seguinte:

$$I = \frac{ML^2}{12} \quad (eq.4)$$

Substituindo a eq.4 na eq.3:

$$\frac{ML^2}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{L^2}{2}k\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 6\frac{k}{M}\theta = 0 \Rightarrow \quad \omega^2 = 6\frac{k}{M}$$

Como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Então:

$$\omega = \omega_0\sqrt{6}$$

35.18

$$y = A \sin(kx)\cos(\omega t)$$

1. Energia potencial

$$U = \frac{1}{2}ky^2 \quad e \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2 y^2 \quad \text{mas} \quad \sigma = \frac{\Delta m}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{1}{2}\sigma\omega^2 y^2$$

Quando $\Delta x \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta x} \to \frac{dU}{dx}$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\sigma\omega^2 A^2 \sin^2(kx)\cos^2(\omega t) \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{4}\sigma\omega^2 A^2 \lambda \cos^2\omega t}$$

2. Energia cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad e \quad v = \frac{dy}{dt} = -A\omega \sin(kx)\sin(\omega t)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\Delta m A^2\omega^2 \sin^2(kx)\sin^2(\omega t)$$

como $\Delta m = \sigma \Delta x \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}\sigma A^2\omega^2 \sin^2(kx)\sin^2(\omega t)$

$$T = \frac{1}{4}\sigma A^2\omega^2\lambda \sin^2(\omega t)$$

3. Energia Total

$$E = U + T$$

$$= \frac{1}{4}\sigma\omega^2 A^2\lambda\left(\underbrace{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}_{=1}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4}\sigma\omega^2 A^2\lambda}$$

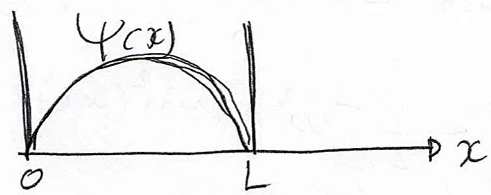
a) $T = \frac{1}{2} m v^2$

$\Delta x \Delta p \geq h$ e $\Delta p = m \Delta v \Rightarrow \Delta x \Delta v \geq \frac{h}{m}$

$T_{min} \simeq \frac{1}{2} m \frac{\left(\frac{h}{m}\right)^2}{\Delta x^2} \Rightarrow T_{min} \simeq \frac{1}{2} m \frac{\frac{h^2}{m^2}}{L^2} \Rightarrow$

$$\boxed{T_{min} \simeq \frac{h^2}{2mL^2}}$$

b) $\psi(x) = \sin(kx)$



$\psi(0) = \psi(L) = 0$

$\psi(L) = \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{L} n \quad (1)$

Mas $T = \frac{p^2}{2m}$ e $p = \hbar k \Rightarrow T = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2)$

Substituindo (1) em (2):

$T = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} n^2$ c/ $n = 1, 2, 3, \ldots$

mas $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ então: $T = \frac{h^2}{4\cancel{\pi^2} 2m} \frac{\cancel{\pi^2}}{L^2} n^2 \Rightarrow$

$T = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$

Fazendo $n = 1$ (correspondente à energia de nível mais baixo):

$$\boxed{T = \frac{h^2}{8mL^2}}$$

c) $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$

$\langle p \rangle = \int_0^L \psi^*(x)\, p\, \psi(x)\, dx$, sendo p o operador momento linear $p = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\langle p \rangle = \int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx$$

$$= i\hbar \int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\left[-\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right] dx$$

$$= -i\hbar \frac{\pi}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx$$

$$= -i\hbar \frac{\pi}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx$$

$$= -i\hbar \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{2\cancel{\pi}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\Big|_0^L$$

$$= -i\frac{\hbar}{2}\cos(2\pi) + i\frac{\hbar}{2}\cos 0$$

$$= -i\frac{\hbar}{2} + i\frac{\hbar}{2} = 0$$

$$\boxed{\langle p \rangle = 0}$$